

## Osztatlan tanárképzés – Szakdolgozat témák 2024

### Debreceni Egyetem TTK, Matematikai Intézet

#### ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLETI TANSZÉK

##### *Algebrai számtestek hatvány egész bázisai*

- **Oktató neve:** Dr. Gaál István
- **Nyelvismeret:** angol
- **Megjegyzés:** algebrai és számelméleti ismeretek, Maple programcsomag
- **Absztrakt:** Speciális kis fokú algebrai számtestek esetén keressük azon algebrai egészeket, melyek hatványai egész bázist alkotnak.

##### *Frobenius probléma*

- **Oktató neve:** Dr. Tengely Szabolcs
- **Nyelvismeret:** angol
- **Megjegyzés:** SageMath és LaTeX
- **Absztrakt:** A Frobenius probléma (vagy pénzváltási probléma) lineáris diofantikus egyenletekkel kapcsolatos. Legegyszerűbb változatában az  $a_1x+a_2y=n$  egyenlet esetében szeretnénk meghatározni a legnagyobb olyan  $n$  természetes számot, amelyre nem létezik  $x,y \geq 0$  egész megoldás. Két változó esetében a megoldás jól ismert. Van olyan módszer, ami a geometria irányából közelíti meg a kérdést, van olyan, ami a generátorfüggvényekre épít és olyan is, ami gráfokra vezet vissza a problémát. A szakdolgozatban ezt a több területet lefedő problémakört szeretnénk bemutatni.

##### *Latin négyzetek*

- **Oktató neve:** Dr. Rácz Gabriella
- **Nyelvismeret:** angol
- **Megjegyzés:** A téma foglalt.
- **Absztrakt:** Egy olyan  $n \times n$ -es mátrixot, amelynek minden sorában és oszlopában az  $1, 2, \dots, n$  számok mindegyike pontosan egyszer szerepel, latin négyzetnek nevezzük. A szakdolgozatban ezeket és a hozzájuk kapcsolódó görög-latin négyzeteket fogjuk vizsgálni, valamint alkalmazásaikkal is megismerkedünk.

##### *Nim típusú játékok*

- **Oktató neve:** Dr. Nyul Gábor
- **Nyelvismeret:** -
- **Megjegyzés:** A téma foglalt.
- **Absztrakt:** -

##### *Plimpton 322*

- **Oktató neve:** Dr. Györkös-Varga Nóra
- **Nyelvismeret:** angol
- **Megjegyzés:** LaTeX használata kötelező.
- **Absztrakt:** A híres ókori matematikai leletről az elmúlt években több új cikk is született angol nyelvű, nemzetközi folyóiratokban, amelyek összevetése és elemzése a szakdolgozat alapjául szolgálhat különös tekintettel arra, hogy nincs a témában friss, magyar nyelvű munka.

##### *Számelméleti problémák a KöMaL pontversenyein*

- **Oktató neve:** Dr. Györkös-Varga Nóra
- **Nyelvismeret:** -
- **Megjegyzés:** LaTeX használata kötelező.
- **Absztrakt:** A Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok első száma 1894-ben jelent meg. Azóta forgatják érdeklődve diákok és tanárok egyaránt. A diákok a pontversenyek különböző nehézségi szintjein kilenc hónapon keresztül bizonyíthatják matematikai problémamegoldó képességüket. Egy lehetséges szakdolgozat során a KöMaL számelmélettel kapcsolatos feladatai közül szemezgetünk: megvizsgáljuk és rendszerezük azokat.

##### *Versenyfeladatok megoldása programcsomagokkal*

- **Oktató neve:** Dr. Pintér Ákos
- **Nyelvismeret:** -

- **Megjegyzés:** Maple ismerete előny, de nem feltétel.
- **Absztrakt:** A projekt célja, hogy a számítógépes háttér olyan elméleti módszerek kidolgozására sarkallja a hallgatót, amiket felhasználhat a versenyfeladatok megoldására és tanítására.

## ANALÍZIS TANSZÉK

### *A legkisebb hatás elve és a Noether-tétel*

- **Oktató neve:** Dr. Novák-Gselmann Eszter
- **Nyelvismeret:** angol
- **Megjegyzés:** Elsősorban matematika-fizika szakos hallgatóknak.
- **Absztrakt:** A fizikában a hatáselv a mozgás természetéről tett állítás, amiből egy erőhatás alatt álló test pályája meghatározható, illetve a kölcsönhatás és átalakulás egyenletei levezethetők. A befutott pálya olyan, amelynek mentén számított hatás stacionárius, azaz a pálya kis odébbtolására nem változik. Így a pályát nem az erőhatásokra bekövetkező gyorsulások alapján próbáljuk felépíteni, hanem a stacionárius hatás alapján próbáljuk kiválasztani a lehetséges pályák közül. Bár a klasszikus mechanikában egyenértékű a Newton-törvényekkel, a hatáselv alkalmasabb az általánosításra és fontos szerepet játszik a modern fizikában. Az elv valóban a fizika egyik nagyszerű általánosítása. Különösen a kvantummechanikában lehet értékelni és legjobban megérteni.

A Noether-tétel egy olyan állítás, amely alapvető jelentőségű a modern fizikában. Azt mondja ki, hogy ha egy (fizikai) rendszerben valamilyen folytonos szimmetria érvényesül, akkor ahhoz megmaradási törvény, illetve megmaradó mennyiség (az ún. „Noether-töltés”) tartozik.

### *A matematikai szorongás (math anxiety) felismerése és oldása feladatokon keresztül*

- **Oktató neve:** Dr. Novák-Gselmann Eszter
- **Nyelvismeret:** angol
- **Megjegyzés:** -
- **Absztrakt:** A matematikai szorongás, más néven matematikai fóbia, a feszültség és a szorongás egy olyan érzése, amely megzavarja a matematikai problémák megoldását a mindennapi életben, illetve iskolai körülmények között. Mark H. Ashcraft úgy határozza meg a matematikai szorongást, mint "a feszültség, aggodalom vagy félelem érzése, amely zavarja a matematikai teljesítményt". Ez egy olyan jelenség, amelyet manapság (szerencsés esetben), gyakran figyelembe vesznek a tanulók matematikai problémáinak vizsgálatakor. Az American Psychological Association szerint a matematikai szorongás gyakran az ún. teszt-szorongáshoz kapcsolódik, de nem azonos vele. Ez a szorongás további szorongást okozhat. A matematikai szorongás tudományos vizsgálata már az 1950-es években elkezdődött, amikor Mary Fides Gough bevezette a matematikafóbia kifejezést, hogy leírja sokak fóbiaszerű érzéseit a matematika iránt. Az első matematikai szorongásmérési skálát Richardson és Suinn dolgozta ki 1972-ben. Az eddigi tanulmányok azt állapították meg, hogy a matematikai szorongás összefügg a matematikai teljesítményleszéken nyújtott gyenge matematikai teljesítménnyel és a matematikával kapcsolatos negatív attitűdökkel.

### *A Takagi függvény tulajdonságai*

- **Oktató neve:** Dr. Boros Zoltán
- **Nyelvismeret:** angol (ajánlott)
- **Megjegyzés:** -
- **Absztrakt:** A Takagi függvény egy nevezetes példa folytonos, sehol sem differenciálható függvényre. Megvizsgáljuk ennek a jellemzését speciális operátorok fixpontjaként illetve függvényegyenletek megoldásaként. Ezen eszközök segítségével további tulajdonságokat is levezetünk.

### *Az abszolút geometria Hilbert-féle axiómarendszerének és metrikus axiómarendszerének összehasonlítása*

- **Oktató neve:** Dr. Lovas Rezső
- **Nyelvismeret:** angol
- **Megjegyzés:** -
- **Absztrakt:** Az egyetemi oktatásban az abszolút geometriának általában csak a metrikus axiómarendszerével ismerkedünk meg, amely szervesen épít a valós számok axiómarendszerére. A Hilbert-féle axiómarendszer a valós számokat nem használja, ilyen értelemben sokkal inkább a „gyökerekig” nyúlik vissza, és mélyebben megvilágít olyan kérdéseket, amelyek a másik axiómarendszerben homályban maradnak. Tanárszakos hallgatók számára egy ilyen összehasonlítás azért lehet tanulságos, mert ezen keresztül bepillantást nyerhetnek abba a kérdésbe, hogy mi minden rejlik azok mögött az alapfeltevések mögött, amiket a középiskolai geometriatanításban hallgatólagosan és ösztönösen többé-kevésbé „nyilvánvalónak” veszünk.

### *Az egész számok Fürstenberg-féle topológiája*

- **Oktató neve:** Dr. Lovas Rezső
- **Nyelvismeret:** angol
- **Megjegyzés:** -
- **Absztrakt:** Ebben a topológiában az egész számok egy részhalmaza pontosan akkor nyílt, ha minden pontjával együtt tartalmaz egy mindkét irányban végtelen számtani sorozatot. H. Fürstenberg 1955-ben ennek a segítségével szép és meglepő topológiai bizonyítást adott arra, hogy végtelen sok prímszám van. Azóta ez a topológia érdekes és nemtriviális példákat és ellenpéldákat szolgáltatott fontos topológiai fogalmakra. A szakdolgozat keretében áttekinthetjük több érdekes tulajdonságát, és részletesen foglalkozunk a metrizálhatóság kérdésével.

### *Függvényegyenletek feladatokban*

- **Oktató neve:** Dr. Mészáros Fruzsina
- **Nyelvismeret:** magyar, angol
- **Megjegyzés:** -
- **Absztrakt:** Egyenletek, sorozatok, függvények tanítása során egyszerűbb függvényegyenletek megoldására vonatkozó feladatok merülhetnek fel. A tehetséggondozás, szakköri munka során pedig lehetőség van jobban elmélyedni a témában, így az ezekhez kapcsolódó definíciók, tételek és feladatok lennének a szakdolgozat fókuszában.

### *Majdnem periodikus függvények*

- **Oktató neve:** Dr. Boros Zoltán
- **Nyelvismeret:** -
- **Megjegyzés:** Függvények ábrázolását és vizsgálatát támogató program(csomag)ok ismerete hasznos lehet, de nem feltétlenül szükséges.
- **Absztrakt:** Célunk tulajdonképpen egy régebbi középiskolás versenyfeladat megoldása: a valós számok halmazán értelmezett  $f(x) = \sin(x) + \sin(x \cdot \sqrt{2})$  függvény értékészletének meghatározása. Áttekinthetjük az ehhez szükséges számelméleti és függvénytan ismereteket, valamint bemutatjuk ezek alkalmazását ilyen típusú feladatok megoldására. Megvizsgáljuk az eredmény általánosítási lehetőségeit is.

### *Matematikai programcsomagok alkalmazása a közép- és általános iskolai tanításban*

- **Oktató neve:** Dr. Fazekas Borbála
- **Nyelvismeret:** -
- **Megjegyzés:** Ajánlott Maple, vagy bármely más programcsomag ismerete.
- **Absztrakt:** A közép- és általános iskolai tanításban sok témakör esetén nagyban segíti a tanulást, ha a tanulók megfelelő ábrák, animációk segítségével vizsgálhatnak egy-egy jelenséget. Ilyen téma például a függvénytan és a geometria. A dolgozat célja feladatokon keresztül bemutatni ennek lehetőségeit.

### *Mátrixfüggvények*

- **Oktató neve:** Dr. Nagy Gergő
- **Nyelvismeret:** angol
- **Megjegyzés:** -
- **Absztrakt:** Bizonyos skalárfüggvény-osztályok elemei speciális típusú mátrixok halmazain is értelmezhetők, ami formálisan a mátrixok függvényekbe való behelyettesítésével történik. Ennek a leképezések típusa szerint többféle definíciója létezik, így adódnak a különféle függvénykalkulusok, például a holomorf, a folytonos és a Borel. A dolgozatban a másodikkal és az első speciális esetével, jelesen mátrixok hatványsoraival foglalkozunk. Áttekinthetjük a kapcsolódó mátrixfüggvények különböző reprezentációit, és tanulmányozzuk az utóbbi kalkulusok alaptulajdonságait. Megismerkedünk alkalmazási lehetőségeikkel olyan témakörökben, mint a mátrixok hatványozása, felbontásai és közepei, továbbá differenciálegyenlet-rendszerek.

## GEOMETRIA TANSZÉK

### *A geometriai bizonyításokhoz használt ábrák szerepe*

- **Oktató neve:** Herendiné Dr. Kónya Eszter
- **Nyelvismeret:** -
- **Megjegyzés:** -
- **Absztrakt:** Három különböző megközelítésből vizsgáljuk az ábrák szerepét a középiskolai (9. és 10. osztályos matematika) geometriai bizonyításokban. Az első esetben az ábra nélküli bizonyításokra összpontosítunk, hogy feltérképezzük a diákok számára az absztrakt geometriai gondolkodás kihívásait. A második esetben statikus ábrát

mellékelünk a feladat szövegéhez, hogy megvizsgáljuk, hogyan segíthetik ezek a diákokat a geometriai elvek és összefüggések megértésében. A harmadik esetben pedig dinamikus ábrát alkalmazunk, hogy elemezzük, hogyan befolyásolja ennek a vizuális eszközöknek a használata a diákok geometriai bizonyítási képességeit és gondolkodási folyamatait.

#### ***A realiztikus matematika oktatási módszer és alkalmazása a tanórán***

- **Oktató neve:** Dr. Figula Ágota
- **Nyelvismeret:** -
- **Megjegyzés:** -
- **Absztrakt:** A téma célja, hogy egy olyan oktatási módszert mutassunk be, amely a diákokban csökkentheti a matematikatanulással kapcsolatos stresszt, és oldani tudja a matematikafeladatok megoldása kapcsán érzett félelmüket. Meg szeretnénk mutatni, hogy az iskolában megtanult ismeretek milyen hasznosak, még akkor is, ha nem terveznek későbbi tanulmányaik során matematikával foglalkozni, a most megszerzett tudást fel tudják használni a mindennapi életben is. A téma feldolgozása során tamaszkodunk Hans Freudenthal: *Mathematics as an educational task*. Springer Dordrecht könyvre.

#### ***Általánosított bifokális görbék a síkon***

- **Oktató neve:** Dr. Vincze Csaba
- **Nyelvismeret:** angol
- **Megjegyzés:** -
- **Absztrakt:** Klasszikus alakzatok (kúpszeletek, Cassini-féle görbe, Apollóniusz-féle körök) általánosításainak geometriai tulajdonságait vizsgáljuk abban az értelemben, hogy a távolságfüggvényt egy folytonos Minkowski-funkcionál származtatja, azaz az egységkör az origót a belsejében tartalmazó, nem feltétlenül centrálszimmetrikus konvex lemez.

*Irodalom:*

(1) Thomas Jahn, Horst Martini, Christian Richter, *Bi-and multifocal curves and surfaces for gauges*, *Journal of Convex Analysis* 23 (3) (2016), pp. 733-744.

#### ***Fejezetek a felületelméletből***

- **Oktató neve:** Dr. Muzsnay Zoltán
- **Nyelvismeret:** angol nyelvvismeret előny
- **Megjegyzés:** -
- **Absztrakt:** -

#### ***Játékok és kísérletek a matematika órán***

- **Oktató neve:** Dr. Figula Ágota
- **Nyelvismeret:** -
- **Megjegyzés:** -
- **Absztrakt:** A téma feldolgozása során igyekszünk olyan játékokat, játékos feladatokat bemutatni, amelyek alkalmasak az érdeklődés felkeltésére, matematikai tanulással bírnak és tovább gondolásra is érdemesek. A felfedezett matematikatanítás, valamint a Varga Tamás vezette matematika kísérlet is kiemeli: a matematikai játékok alkalmazása a gondolkodás fejlesztése. Az alkalmasan megválasztott játékok az érdeklődés felkeltése, kedvcsinálás mellett alkalmasak gondolkodási módszerek (pl. indukció, analógia, invariánsok) felismertetésére, felfedeztetésére, bemutatására, szemléltetésére, tudatosítására, alkalmazására és gyakorlására. Felfedeztetünk, bevezetünk, gyakorolhatunk új fogalmakat, fejleszthetjük a matematikai kompetenciákat.

#### ***Klasszikus geometriai problémák***

- **Oktató neve:** Dr. Oláh Márk
- **Nyelvismeret:** angol nyelv előny
- **Megjegyzés:** LaTeX alapszintű ismerete elvárt
- **Absztrakt:** Olyan klasszikus geometriai problémákat vizsgálunk, amelyekkel az iskolai tanórák színesebbé tehetőek, és amelyek által a diákok betekintést nyerhetnek a geometria legkorábbi alkalmazásaiba különböző gyakorlati vagy akár kozmikus szintű problémák megoldására.

#### ***Mobilalkalmazások használata a matematikaoktatásban***

- **Oktató neve:** Herendiné Dr. Kónya Eszter
- **Nyelvismeret:** -
- **Megjegyzés:** -

- **Absztrakt:** Számtalan mobilalkalmazás létezik, amelyek felhasználhatók a középiskolai matematikaoktatásban. A szakdolgozat célja egyrészt az, hogy ezeket feltérképezze és megvizsgálja a használhatóság szempontjából, másrészt, hogy egy választott alkalmazást a tanításban kipróbálva a tapasztalatokat bemutassa és elemezze.

### ***Tomográfia egyszerűen***

- **Oktató neve:** Dr. Nagy Ábris
- **Nyelvismeret:** -
- **Megjegyzés:** -
- **Absztrakt:** A tomográfia célja, hogy képet alkossunk egy tárgy keresztmetszetéről anélkül, hogy ténylegesen fel-darabolnánk azt. Egy CT-vizsgálat során ehhez röntgensugarakat irányítanak az emberi testre és mérik ezen sugarak intenzitáscsökkenését, ami alapján matematikai számítások segítségével feltérképezhető a belső összetétel. Tomográfiai vizsgálatot azonban nem csak az emberi testen, hanem fémből készült tárgyakon, kőzeteken, de akár a Föld atmoszféráján is végezhetünk. Az ezek mögött álló matematikai módszerek azonban mind megegyeznek abban, hogy egy fizikai mennyiség ismeretlen eloszlásfüggvényét kell meghatározni egyenesek mentén vett integrál-jainak ismeretében. A probléma diszkrét változata során egy síkbeli véges pontthalmazt kell megtalálnunk úgy, hogy csupán bizonyos egyenesek mentén az egyenesre illeszkedő pontok számát ismerjük. Ezzel a témakörrel foglalkozik a diszkrét tomográfia, ahol nem meglepő módon fontos szerepet játszanak a kombinatorikai és gráf elméleti módszerek. A probléma egy további igen speciális változata, amikor egy 0-1 elemű mátrixot szeretnénk megtalálni a sor és oszlop összegei alapján. Ennek megoldásra több különböző egyszerű megoldási módszer is született már, amelyek megértéséhez elegendőek a középiskolai matematikai ismeretek és némi egyszerű logika.

### ***Valószínűesszámitási paradoxonok***

- **Oktató neve:** Dr. Oláh Márk
- **Nyelvismeret:** angol nyelv előny
- **Megjegyzés:** LaTeX alapszintű ismerete elvárt
- **Absztrakt:** Olyan valószínűesszámitási paradoxonokat vizsgálunk, amelyekkel akár az iskolai, akár az egyetemi tanórák színesebbé tehetőek, és amelyek hozzájárulnak a diákok szemléletének fejlesztéséhez.